

© 2025 г. М.В. КУКОВЕРОВ (gedevan\_space@mail.ru)  
(Публичное акционерное общество  
“Московская объединенная энергетическая компания”)

## К ВЫЧИСЛЕНИЮ РАЗМЕРА ГРАНИЦЫ ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ШУРУ

Рассматривается подмножество области устойчивости по Шуру, а именно область параметров, при которых корни полинома степени  $n$  по модулю не превышают единицы и являются вещественными числами. Проведена оценка площади гиперповерхности рассмотренной многомерной области в зависимости от количества измерений  $n$ . Максимальное значение площади достигается при  $n = 3$ .

*Ключевые слова:* многомерные интегралы, область устойчивости по Шуру, авторегрессия, стационарные авторегрессионные процессы, пограничные процессы.

DOI: 10.31857/S0005231025020024, EDN: IRBDBVH

### 1. Введение

Ряд современных исследований посвящен изучению области устойчивости по Шуру полиномов степени  $n$  в пространстве параметров, а также изучению ее границы [1]. При этом вопрос определения размера границы этой области, т.е. площади ее гиперповерхности, остается открытым.

Будем рассматривать полиномы вида

$$(1) \quad x^n - \alpha_1 x^{n-1} - \dots - \alpha_{n-1} x - \alpha_n = 0,$$

где параметры  $\alpha_i \in R$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Каждому полиному соответствует точка  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  в  $n$ -мерном евклидовом пространстве параметров  $R^n$ .

Область устойчивости по Шуру – это область параметров в  $R^n$ , при которых все корни полиномов находятся внутри единичного круга на комплексной плоскости. Указанную область обозначим через  $D_n$ , как в [2]. В указанной работе представлена формула для расчета объема  $V(D_n)$  области  $D_n$ .

Область параметров внутри  $D_n$ , т.е. подмножество в  $D_n$ , при которых все корни полиномов являются вещественными, обозначим через  $\mathcal{E}_n$ , как в [3]. В этой работе с использованием многомерных интегралов Селберга найдена формула для расчета объема  $V(\mathcal{E}_n)$  области  $\mathcal{E}_n$ .

Размеры областей устойчивости полиномов [2, 3]

$n$	$V(D_n)$	$V(\mathcal{E}_n)$	$V(D_n \setminus \mathcal{E}_n)$	$\frac{V(\mathcal{E}_n)}{V(D_n)}$	$\frac{V(D_n \setminus \mathcal{E}_n)}{V(D_n)}$
«1»	«2»	«3»	«4»	«5»	«6»
1	2	2	0	1	0
2	4	1,333	2,667	0,3333	0,6667
3	5,333	0,355	4,978	0,0667	0,9333
4	7,111	0,041	7,070	0,0057	0,9943
5	7,585	0,002	7,583	0,0003	0,9997

Величины  $V(D_n)$  и  $V(\mathcal{E}_n)$  достигают максимума при  $n = 6$  и  $n = 1$  и являются бесконечно малыми величинами при  $n \rightarrow \infty$ .<sup>1</sup>

Граница  $\partial D_n$  области  $D_n$  состоит из двух гиперплоскостей и одной гиперповерхности [1, 4]. Гиперплоскости соответствуют корням  $-1$  и  $1$ .

Граница  $\partial \mathcal{E}_n$  области  $\mathcal{E}_n$  состоит из двух гиперплоскостей, которые соответствуют гиперплоскостям поверхности области  $D_n$ , и одной гиперповерхности, которая находится внутри области  $D_n$ .

В данной работе представлены результаты вычисления размеров  $S(\partial \mathcal{E}_n)$  границ  $\partial \mathcal{E}_n$  области  $\mathcal{E}_n$ .

## 2. Вычисление $S(\partial \mathcal{E}_2)$

Рассмотрим полином степени 2:

$$(2) \quad x^2 - \alpha_1 x - \alpha_2 = 0.$$

Областью  $D_2$  является множество параметров:

$$\begin{cases} -2 < \alpha_1 < 2, \\ -1 < \alpha_2 < 1 - |\alpha_1|. \end{cases}$$

Областью  $\mathcal{E}_2$  является множество параметров:

$$\begin{cases} -2 < \alpha_1 < 2, \\ -\alpha_1^2/4 < \alpha_2 < 1 - |\alpha_1|. \end{cases}$$

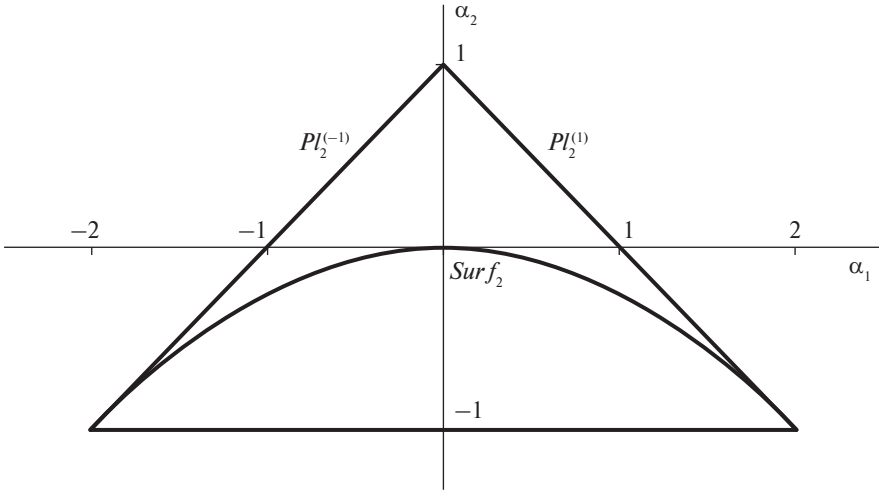
С эконометрической точки зрения на рисунке изображены области стационарности, параметры из которых соответствуют стационарным авторегрессионным процессам 2-го порядка, а внешняя граница соответствует пограничным процессам.

Граница  $\partial \mathcal{E}_2$  состоит из участка параболы  $Surf_2$  и двух отрезков  $Pl_2^{(1)}$  и  $Pl_2^{(-1)}$ , которые соответствуют корням  $1$  и  $-1$ . То есть полином (2) с па-

<sup>1</sup> Несмотря на то, что сравнение несоизмеримых по размерности величин, таких как длина, площадь, объем и пр., может вызывать неопределенность, тем не менее в ряде случаев это может вызывать интерес. См., например, исследование данного вопроса для сферы и шара:

<https://mathworld.wolfram.com/Hypersphere.html>

<https://mathworld.wolfram.com/Ball.html>



Области  $D_2$  и  $\mathcal{E}_2$ . Источник: [5].

параметрами из участка  $Pl_2^{(1)}$  будет иметь корень, равный 1, а полином (2) с параметрами из участка  $Pl_2^{(-1)}$  будет иметь корень, равный  $-1$ .

Длину границы  $S(\partial\mathcal{E}_2)$  можно вычислить как сумму длин указанных участков:

$$S(\partial\mathcal{E}_2) = S(Pl_2^{(1)}) + S(Pl_2^{(-1)}) + S(Surf_2) \approx 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 4,591 \approx 10,248.$$

### 3. Вычисление $S(\partial\mathcal{E}_3)$

Рассмотрим полином степени 3:

$$(3) \quad x^3 - \alpha_1 x^2 - \alpha_2 x - \alpha_3 = 0.$$

В [6] показано, что областью  $D_3$  является множество параметров:

$$\begin{cases} -1 < \alpha_3 < 1, \\ -3 < \alpha_1 < 3, \\ \alpha_2 < 1 - |\alpha_1 + \alpha_3|, \\ \alpha_2 > -1 + \alpha_3^2 - \alpha_1 \alpha_3. \end{cases}$$

Областью  $\mathcal{E}_3$  является множество параметров:

$$\begin{cases} -1 < \alpha_3 < 1, \\ -3 < \alpha_1 < 3, \\ \alpha_2 < 1 - |\alpha_1 + \alpha_3|, \\ \alpha_1^2 \alpha_2^2 + 4\alpha_2^3 - 4\alpha_1^3 \alpha_3 - 27\alpha_3^2 - 18\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 > 0. \end{cases}$$

Граница  $\partial\mathcal{E}_3$  состоит из поверхности  $Surf_3$  и участков плоскостей  $Pl_3^{(1)}$  и  $Pl_3^{(-1)}$ , которые соответствуют корням 1 и  $-1$ . То есть полином (3) с параметрами из участка  $Pl_3^{(1)}$  будет иметь корень, равный 1, а полином (3) с параметрами из участка  $Pl_3^{(-1)}$  будет иметь корень, равный  $-1$ . Используя формулы Виета, указанные поверхности можно представить в параметрическом виде.

Параметрический вид  $Pl_3^{(1)}$ :

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1 + x_2 + x_3, \\ \alpha_2 = -x_2 - x_3 - x_2x_3, \\ \alpha_3 = x_2x_3, \end{cases}$$

где корни полинома (3)  $x_1 = 1$ ,  $x_2 \in [-1, 1]$ ,  $x_3 \in [-1, x_2]$ .

Параметрический вид  $Pl_3^{(-1)}$ :

$$\begin{cases} \alpha_1 = -1 + x_2 + x_3, \\ \alpha_2 = x_2 + x_3 - x_2x_3, \\ \alpha_3 = -x_2x_3, \end{cases}$$

где корни полинома (3)  $x_1 = -1$ ,  $x_2 \in [-1, 1]$ ,  $x_3 \in [-1, x_2]$ .

Параметрический вид  $Surf_3$ :

$$(4) \quad \begin{cases} \alpha_1 = 2t + x_3, \\ \alpha_2 = -t^2 - 2tx_3, \\ \alpha_3 = t^2x_3, \end{cases}$$

где корни полинома (3)  $x_1 = x_2 = t$ ,  $t \in [-1, 1]$ ,  $x_3 \in [-1, 1]$ .

Площадь границы  $S(\partial\mathcal{E}_3)$  можно вычислить как сумму площадей указанных поверхностей:

$$(5) \quad \begin{aligned} S(\partial\mathcal{E}_3) &= S(Pl_3^{(1)}) + S(Pl_3^{(-1)}) + S(Surf_3) \approx \\ &\approx \sqrt{3} \times \frac{4}{3} + \sqrt{3} \times \frac{4}{3} + 6,759 \approx 11,378. \end{aligned}$$

#### 4. Вычисление $S(\partial\mathcal{E}_n)$

Рассмотрим полином степени  $n$  вида (1).

Граница  $\partial\mathcal{E}_n$  области  $\mathcal{E}_n$  состоит из гиперповерхности  $Surf_n$  и участков гиперплоскостей  $Pl_n^{(1)}$  и  $Pl_n^{(-1)}$ , которые соответствуют корням 1 и  $-1$ , т.е. полином (1) с параметрами из участка  $Pl_n^{(1)}$  будет иметь корень, равный 1, а полином (1) с параметрами из участка  $Pl_n^{(-1)}$  будет иметь корень, равный  $-1$ .

Утверждения о размерах участков гиперплоскостей  $Pl_n^{(1)}$  и  $Pl_n^{(-1)}$  и гиперповерхности  $Sur f_n$  сформулируем в виде теорем.

*Теорема 1. Площади участков гиперплоскостей  $Pl_n^{(1)}$  и  $Pl_n^{(-1)}$ ,  $n \geq 2$ , можно представить в виде*

$$(6) \quad S(Pl_n^{(1)}) = S(Pl_n^{(-1)}) = \sqrt{n} \times 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\{(k-1)!\}^2}{(2k-1)!}.$$

*Теорема 2. Площадь гиперповерхности  $Sur f_n$ ,  $n \geq 3$ , можно представить в виде*

$$(7) \quad S(Sur f_n) = 2 \int_{\substack{x_1 \in (-1,1) \\ -1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq 1}} \dots \int \frac{\sqrt{1-x_1^{2n}}}{\sqrt{1-x_1^2}} \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} |x_i - x_j| dx_1 \dots dx_{n-1}.$$

В частности, при  $n = 3$

$$S(Sur f_3) = 2 \iint_{\substack{-1 \leq x_1 \leq 1 \\ -1 \leq x_2 \leq 1}} \frac{\sqrt{1-x_1^6}}{\sqrt{1-x_1^2}} |x_1 - x_2| dx_1 dx_2 \approx 6,759.$$

Размер  $S(\partial \mathcal{E}_n)$  границы  $\partial \mathcal{E}_n$  можно вычислить, как сумму

$$(8) \quad S(\partial \mathcal{E}_n) = S(Pl_n^{(1)}) + S(Pl_n^{(-1)}) + S(Sur f_n).$$

Основной результат статьи представлен в следующей теореме.

*Теорема 3. Размер  $S(\partial \mathcal{E}_n)$  границы  $\partial \mathcal{E}_n$  является бесконечно малой величиной при  $n \rightarrow \infty$ . Максимальное значение достигается при  $n = 3$ .*

## 5. Заключение

В работе представлены результаты расчетов размеров  $S(\partial \mathcal{E}_n)$  границы  $\partial \mathcal{E}_n$  области  $\mathcal{E}_n$  в  $n$ -мерном пространстве параметров полиномов, являющейся подмножеством области устойчивости по Шуру  $D_n$ .

Представляется целесообразным дальнейшее изучение вопроса определения размера границы  $\partial D_n$  области  $D_n$ . Как уже было отмечено, граница  $\partial D_n$  области  $D_n$  состоит из двух гиперплоскостей, соответствующих корням  $-1$  и  $1$ , и одной гиперповерхности, которая обозначена как  $\mathfrak{S}_n$ . Вычисление площади  $S(\mathfrak{S}_n)$  для произвольного  $n$  представляется более сложной задачей, по сравнению с результатом (7) теоремы 2.

Доказательство теоремы 1. Стандартными вычислениями можно проверить, что (6) выполняется для  $n = 2, 3$ . На основании (6) получаем

$$\begin{aligned} S(Pl_2^{(1)}) &= 2\sqrt{2}, \\ S(Pl_3^{(1)}) &= \sqrt{3} \frac{4}{3}, \end{aligned}$$

что соответствует значениям, вычисленным в разделах 2 и 3.

Докажем (6) для произвольного  $n$ .

Участок гиперплоскости  $Pl_n^{(1)}$  может быть параметризован так:

$$(II.1) \quad \begin{cases} \alpha_1 = 1 + \zeta_1 \\ \alpha_2 = -(\zeta_1 + \zeta_2) \\ \alpha_3 = \zeta_2 + \zeta_3 \\ \dots \\ \alpha_k = (-1)^{k-1}(\zeta_{k-1} + \zeta_k) \\ \dots \\ \alpha_{n-2} = (-1)^{n-3}(\zeta_{n-3} + \zeta_{n-2}) \\ \alpha_{n-1} = (-1)^{n-2}(\zeta_{n-2} + \zeta_{n-1}) \\ \alpha_n = (-1)^{n-1}\zeta_{n-1}, \end{cases}$$

где  $\zeta_i, i = 1, \dots, n-1$  – это элементарный симметрический многочлен степени  $i$  от  $(n-1)$  переменных  $x_2, \dots, x_n, -1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq 1$ .

Параметризация (II.1) получена на основании формул Виета после приравнивания корня  $x_1 = 1$ . Упорядочивание параметров  $x_2, \dots, x_n$  связано с тем, что параметризация (II.1) симметрична относительно перестановок указанных параметров.

По определению

$$(II.2) \quad S(Pl_n^{(1)}) = \int_{-1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq 1} \dots \int \|H_n\| dx_2 \dots dx_n,$$

где  $H_n$  – определитель:

$$(II.3) \quad H_n = \begin{vmatrix} j_1 & \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_n} \\ j_2 & \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ j_n & \frac{\partial \alpha_n}{\partial x_2} & \frac{\partial \alpha_n}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial \alpha_n}{\partial x_n} \end{vmatrix},$$

где  $\{j_1, \dots, j_n\}$  – ортонормированный базис в пространстве  $R^n$ .

Заметим, что для  $\zeta_i$  в (П.1) выполняется равенство

$$\frac{\partial \zeta_i}{\partial x_r} = \zeta_{i-1}^{(r)},$$

где  $\zeta_j^{(r)}$  – это элементарный симметрический многочлен степени  $j$  от  $n-2$  переменных  $x_2, \dots, x_{r-1}, x_{r+1}, \dots, x_n$ .

Без ограничения общности пусть  $n = 2k + 1$ . Тогда на основании (П.3) и (П.1) получаем, что

$$(П.4) \quad H_n = \begin{vmatrix} j_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ j_2 & -1 - \zeta_1^{(2)} & -1 - \zeta_1^{(3)} & \cdots & -1 - \zeta_1^{(n)} \\ j_3 & \zeta_1^{(2)} + \zeta_2^{(2)} & \zeta_1^{(3)} + \zeta_2^{(3)} & \cdots & \zeta_1^{(n)} + \zeta_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ j_{n-1} & -\zeta_{n-3}^{(2)} - \zeta_{n-2}^{(2)} & -\zeta_{n-3}^{(3)} - \zeta_{n-2}^{(3)} & \cdots & -\zeta_{n-3}^{(n)} - \zeta_{n-2}^{(n)} \\ j_n & \zeta_{n-2}^{(2)} & \zeta_{n-2}^{(3)} & \cdots & \zeta_{n-2}^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим  $H_n^{(n)}$  – алгебраическое дополнение элемента  $j_n$  в  $H_n$ :

$$H_n^{(n)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 - \zeta_1^{(2)} & -1 - \zeta_1^{(3)} & \cdots & -1 - \zeta_1^{(n)} \\ \zeta_1^{(2)} + \zeta_2^{(2)} & \zeta_1^{(3)} + \zeta_2^{(3)} & \cdots & \zeta_1^{(n)} + \zeta_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\zeta_{n-3}^{(2)} - \zeta_{n-2}^{(2)} & -\zeta_{n-3}^{(3)} - \zeta_{n-2}^{(3)} & \cdots & -\zeta_{n-3}^{(n)} - \zeta_{n-2}^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Стандартными преобразованиями строк  $H_n^{(n)}$  можно привести к виду

$$H_n^{(n)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -\zeta_1^{(2)} & -\zeta_1^{(3)} & \cdots & -\zeta_1^{(n)} \\ \zeta_2^{(2)} & \zeta_2^{(3)} & \cdots & \zeta_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\zeta_{n-2}^{(2)} & -\zeta_{n-2}^{(3)} & \cdots & -\zeta_{n-2}^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Так как рассматривается участок гиперплоскости  $Pl_n^{(1)}$  и  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$  в (П.1), то  $\sum_{i=1}^n \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} = 0$  для всех  $j = 2, \dots, n$ .

Из этого следует, что алгебраические дополнения элементов первого столбца в  $H_n$  по модулю равны между собой, и для определения модуля их величины достаточно рассмотреть одно из них, например  $H_n^{(n)}$ .

Тогда на основании (П.2) и [3] получаем

$$(П.5) \quad S(Pl_n^{(1)}) = \sqrt{n} \int \cdots \int_{-1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq 1} |H_n^{(n)}| dx_2 \dots dx_n = \sqrt{n} V(\mathcal{E}_{n-1}),$$

где  $V(\mathcal{E}_{n-1})$  – объем области  $\mathcal{E}_{n-1}$ .

Для завершения доказательства утверждения теоремы для  $Pl_n^{(1)}$  остается учесть результат из [3], что

$$V(\mathcal{E}_n) = 2^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{k=1}^n \frac{\{(k-1)!\}^2}{(2k-1)!}.$$

Утверждение теоремы для  $Pl_n^{(-1)}$  доказывается аналогично.

Теорема 1 доказана.

*Доказательство теоремы 2.* Доказательство проведем по индукции.

Пусть  $n = 3$ . Поверхность  $Surf_3$  параметризована в (4). Найдем ее площадь  $S(Surf_3)$ .

$$S(Surf_3) = \iint_{\substack{-1 \leq t \leq 1 \\ -1 \leq x_3 \leq 1}} \sqrt{\left(\frac{D(\alpha_1, \alpha_2)}{D(t, x_3)}\right)^2 + \left(\frac{D(\alpha_1, \alpha_3)}{D(t, x_3)}\right)^2 + \left(\frac{D(\alpha_2, \alpha_3)}{D(t, x_3)}\right)^2} dt dx_3,$$

где

$$\begin{aligned} \frac{D(\alpha_1, \alpha_2)}{D(t, x_3)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_3} \end{vmatrix} \simeq 2(t - x_3), \\ \frac{D(\alpha_1, \alpha_3)}{D(t, x_3)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \alpha_3}{\partial t} & \frac{\partial \alpha_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} \simeq 2t(t - x_3), \\ \frac{D(\alpha_2, \alpha_3)}{D(t, x_3)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \alpha_3}{\partial t} & \frac{\partial \alpha_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} \simeq 2t^2(t - x_3). \end{aligned}$$

Знак “ $\simeq$ ” используется в смысле равенства по модулю. Это допустимо, поскольку соответствующие величины в дальнейшем возводятся в квадраты.



Таким образом,

$$(II.6) \quad S(Surf_3) = \iint_{\substack{-1 \leq t \leq 1 \\ -1 \leq x_3 \leq 1}} \|A_3\| dt dx_3,$$

где

$$(II.7) \quad \|A_3\| = 2\sqrt{1+t^2+t^4} |t-x_3|.$$

Базой индукции является (II.6) для  $S(Surf_3)$ .

Теперь для произвольного  $n$  рассмотрим поверхность  $Surf_n$ , которая параметризована так:

$$(II.8) \quad \begin{cases} \alpha_1 = 2t + \sigma_1 \\ \alpha_2 = -(t^2 + 2t\sigma_1 + \sigma_2) \\ \alpha_3 = t^2\sigma_1 + 2t\sigma_2 + \sigma_3 \\ \dots \\ \alpha_k = (-1)^{k-1}(t^2\sigma_{k-2} + 2t\sigma_{k-1} + \sigma_k) \\ \dots \\ \alpha_{n-2} = (-1)^{n-3}(t^2\sigma_{n-4} + 2t\sigma_{n-3} + \sigma_{n-2}) \\ \alpha_{n-1} = (-1)^{n-2}(t^2\sigma_{n-3} + 2t\sigma_{n-2}) \\ \alpha_n = (-1)^{n-1}t^2\sigma_{n-2}, \end{cases}$$

где  $\sigma_i$ ,  $i = 1, \dots, n-2$ , – это элементарный симметрический многочлен степени  $i$  от  $(n-2)$  переменных  $x_3, \dots, x_n$ ,  $t \in [-1, 1]$ ,  $-1 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n \leq 1$ .

Параметризация (II.8) получена на основании формул Виета после приравнивания корней  $x_1 = x_2 = t$ . Упорядочивание параметров  $x_3, \dots, x_n$  связано с тем, что параметризация (II.8) симметрична относительно перестановок указанных параметров.

Предположим, что утверждение теоремы верно для площади  $S(Surf_n)$ . То есть предположим, что

$$(II.9) \quad S(Surf_n) = \int \dots \int_{\substack{t \in [-1, 1] \\ -1 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n \leq 1}} \|A_n\| dt dx_3 \dots dx_n,$$

где

$$(II.10) \quad \|A_n\| = 2\sqrt{1+t^2+\dots+t^{2(n-1)}} \left( \prod_{3 \leq i \leq n} |t-x_i| \right) \left( \prod_{3 \leq i < j \leq n} |x_i-x_j| \right).$$

Отдельно можно отметить, что формулировки (II.9) и (7) эквивалентны, но в рамках доказательства теоремы формулировка (II.9) более удобна.

Теперь на основании (II.10) докажем утверждение теоремы для площади  $S(Surf_{n+1})$ .

Введем обозначение  $y = x_{n+1}$ . Тогда поверхность  $Surf_{n+1}$  параметризуется так:

$$(II.11) \quad \begin{cases} \alpha_1 = 2t + \sigma_1 + y \\ \alpha_2 = -(t^2 + 2t(\sigma_1 + y) + \sigma_2 + y\sigma_1) \\ \alpha_3 = t^2(\sigma_1 + y) + 2t(\sigma_2 + y\sigma_1) + \sigma_3 + y\sigma_2 \\ \alpha_4 = -(t^2(\sigma_2 + y\sigma_1) + 2t(\sigma_3 + y\sigma_2) + \sigma_4 + y\sigma_3) \\ \dots \\ \alpha_k = (-1)^{k-1}(t^2(\sigma_{k-2} + y\sigma_{k-3}) + 2t(\sigma_{k-1} + y\sigma_{k-2}) + \sigma_k + y\sigma_{k-1}) \\ \dots \\ \alpha_{n-1} = (-1)^{n-2}(t^2(\sigma_{n-3} + y\sigma_{n-4}) + 2t(\sigma_{n-2} + y\sigma_{n-3}) + y\sigma_{n-2}) \\ \alpha_n = (-1)^{n-1}(t^2(\sigma_{n-2} + y\sigma_{n-3}) + 2ty\sigma_{n-2}) \\ \alpha_{n+1} = (-1)^n t^2 y \sigma_{n-2}, \end{cases}$$

где  $\sigma_i$ ,  $i = 1, \dots, n-2$ , определены в (II.8),  $t \in [-1, 1]$ ,  $-1 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n \leq y \leq 1$ .

Параметризация (II.11) получена на основании формул Виета после приравнивания корней  $x_1 = x_2 = t$ . Упорядочивание параметров  $x_3, \dots, x_n, y$  связано с тем, что параметризация (II.11) симметрична относительно перестановок указанных параметров.

По определению

$$(II.12) \quad S(Surf_{n+1}) = \int_{t \in [-1, 1]} \dots \int_{-1 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n \leq y \leq 1} \|A_{n+1}\| dt dx_3 \dots dx_n dy,$$

где  $A_{n+1}$  – определитель:

$$(II.13) \quad A_{n+1} = \begin{vmatrix} j_1 & \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_n} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \\ j_2 & \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_n} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ j_n & \frac{\partial \alpha_n}{\partial t} & \frac{\partial \alpha_n}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial \alpha_n}{\partial x_n} & \frac{\partial \alpha_n}{\partial y} \\ j_{n+1} & \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial t} & \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial y} \end{vmatrix},$$

$\{j_1, \dots, j_{n+1}\}$  – ортонормированный базис в пространстве  $R^{n+1}$ .

Рассмотрим  $A_{n+1}$  как вектор-функцию от  $y$ :

$$(II.14) \quad A_{n+1} = G(y) = \sum_{j=1}^{n+1} j_j \times g_j(y) = (g_1(y), \dots, g_{n+1}(y)).$$

С учетом (П.11) можно увидеть, что  $g_j(y)$ ,  $j = 1 \dots n + 1$ , являются полиномами от  $y$  степени не выше  $n - 1$ .

Покажем, что  $G(y) = 0$  при  $y = t$  и при  $y = x_i$ ,  $i = 3, \dots, n$ .

Из (П.11) можно увидеть, что для  $k = 1, \dots, n + 1$

$$\alpha_k = (-1)^{k-1} (t^2(\sigma_{k-2} + y\sigma_{k-3}) + 2t(\sigma_{k-1} + y\sigma_{k-2}) + \sigma_k + y\sigma_{k-1}),$$

где  $\sigma_i$  определены выше для  $i = 1, \dots, n - 2$ ,  $\sigma_0 = 1$ ,  $\sigma_m = 0$  при  $m < 0$  и при  $m > n - 2$ .

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_k}{\partial y} &= (-1)^{k-1} (t^2 \sigma_{k-3} + 2t \sigma_{k-2} + \sigma_{k-1}), \\ \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} &= (-1)^{k-1} 2(t(\sigma_{k-2} + y\sigma_{k-3}) + \sigma_{k-1} + y\sigma_{k-2}), \\ \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_r} &= (-1)^{k-1} \left( t^2 \left( \frac{\partial \sigma_{k-2}}{\partial x_r} + y \frac{\partial \sigma_{k-3}}{\partial x_r} \right) + 2t \left( \frac{\partial \sigma_{k-1}}{\partial x_r} + y \frac{\partial \sigma_{k-2}}{\partial x_r} \right) + \frac{\partial \sigma_k}{\partial x_r} + y \frac{\partial \sigma_{k-1}}{\partial x_r} \right), \end{aligned}$$

где  $r = n - 3, \dots, n$ .

Для  $\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_r}$  выполняется равенство

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_r} = \sigma_{i-1}^{(r)},$$

где  $\sigma_j^{(r)}$  – это элементарный симметрический многочлен степени  $j$  от  $n - 3$  переменных  $x_3, \dots, x_{r-1}, x_{r+1}, \dots, x_n$ .

Тогда

$$(П.15) \quad \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_r} = (-1)^{k-1} \left( t^2 \left( \sigma_{k-3}^{(r)} + y \sigma_{k-4}^{(r)} \right) + 2t \left( \sigma_{k-2}^{(r)} + y \sigma_{k-3}^{(r)} \right) + \sigma_{k-1}^{(r)} + y \sigma_{k-2}^{(r)} \right).$$

Для  $\sigma_i$  и  $\sigma_i^{(r)}$  выполняется равенство

$$(П.16) \quad \sigma_i = \sigma_i^{(r)} + x_r \sigma_{i-1}^{(r)}.$$

Тогда на основании (П.15) и (П.16) можно увидеть, что  $\forall k = 1, \dots, n + 1$  выполняется равенство

$$\left. \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_r} \right|_{y=x_r} = (-1)^{k-1} (t^2 \sigma_{k-3} + 2t \sigma_{k-2} + \sigma_{k-1}) = \frac{\partial \alpha_k}{\partial y}.$$

Это означает, что при  $y = x_r$  столбец  $r$  равен столбцу  $n + 1$  в определителе  $A_{n+1}$  (П.13),  $r = 3, \dots, n$ .

Кроме того,

$$\left. \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} \right|_{y=t} = (-1)^{k-1} (t^2 \sigma_{k-3} + 2t \sigma_{k-2} + \sigma_{k-1}) = \frac{\partial \alpha_k}{\partial y}.$$

Это означает, что при  $y = t$  столбец 2 равен столбцу  $n + 1$  в определителе  $A_{n+1}$  (П.13).

Таким образом,

$$(П.17) \quad G(y) = K (t - y) \prod_{3 \leq i \leq n} (x_i - y),$$

где  $K$  – вектор в  $R^{n+1}$ .

Тогда

$$(П.18) \quad A_{n+1}|_{y=0} = G(0) = K t x_3 \cdots x_n,$$

где  $A_{n+1}|_{y=0}$  – определитель  $A_{n+1}$  в (П.13) при  $y = 0$ .

Определитель  $A_{n+1}|_{y=0}$  можно разложить по последней строке, учитывая, что ненулевыми останутся только первый и последний элементы строки. Тогда

$$A_{n+1}|_{y=0} = j_{n+1} B_n + A_n \left. \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial y} \right|_{y=0}$$

и

$$(П.19) \quad \|A_{n+1}|_{y=0}\| = \sqrt{(B_n)^2 + \|A_n\|^2 (t^2 x_3 \cdots x_n)^2},$$

где  $\|A_n\|$  определена в (П.10),  $B_n$  – алгебраическое дополнение элемента  $j_{n+1}$  в определителе  $A_{n+1}|_{y=0}$ .

С учетом (П.11)

$$(П.20) \quad B_n \simeq \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2t + 2\sigma_1 & 2t + \sigma_1^{(3)} & \cdots & 2t + \sigma_1^{(n)} & 2t + \sigma_1 \\ 2t\sigma_1 + 2\sigma_2 & t^2 + 2t\sigma_1^{(3)} + \sigma_2^{(3)} & \cdots & t^2 + 2t\sigma_1^{(n)} + \sigma_2^{(n)} & t^2 + 2t\sigma_1 + \sigma_2 \\ 2t\sigma_2 + 2\sigma_3 & t^2\sigma_1^{(3)} + 2t\sigma_2^{(3)} + \sigma_3^{(3)} & \cdots & t^2\sigma_1^{(n)} + 2t\sigma_2^{(n)} + \sigma_3^{(n)} & t^2\sigma_1 + 2t\sigma_2 + \sigma_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2t\sigma_{n-4} + 2\sigma_{n-3} & t^2\sigma_{n-5}^{(3)} + 2t\sigma_{n-4}^{(3)} + \sigma_{n-3}^{(3)} & \cdots & t^2\sigma_{n-5}^{(n)} + 2t\sigma_{n-4}^{(n)} + \sigma_{n-3}^{(n)} & t^2\sigma_{n-5} + 2t\sigma_{n-4} + \sigma_{n-3} \\ 2t\sigma_{n-3} + 2\sigma_{n-2} & t^2\sigma_{n-4}^{(3)} + 2t\sigma_{n-3}^{(3)} & \cdots & t^2\sigma_{n-4}^{(n)} + 2t\sigma_{n-3}^{(n)} & t^2\sigma_{n-4} + 2t\sigma_{n-3} + \sigma_{n-2} \\ 2t\sigma_{n-2} & t^2\sigma_{n-3}^{(3)} & \cdots & t^2\sigma_{n-3}^{(n)} & t^2\sigma_{n-3} + 2t\sigma_{n-2} \end{vmatrix}$$

Лемма 1.

$$(П.21) \quad B_n \simeq 2t x_3 \cdots x_n \left( \prod_{3 \leq i \leq n} |t - x_i| \right) \left( \prod_{3 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j| \right).$$

Доказательство леммы 1 приведено в конце доказательства теоремы.

Используя (П.19), (П.10) и (П.21) в лемме 1, получим

$$\begin{aligned} & \|A_{n+1}|_{y=0}\| = \\ & = 2|tx_3 \cdots x_n| \left( \prod_{3 \leq i \leq n} |t - x_i| \right) \left( \prod_{3 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j| \right) \sqrt{1 + t^2(1 + t^2 + \dots + t^{2(n-1)})} \end{aligned}$$

и на основании (П.18) находим

$$(П.22) \quad \|K\| = \frac{\|A_{n+1}|_{y=0}\|}{|tx_3 \cdots x_n|}.$$

Возвращая обозначение  $x_{n+1} = y$ , на основании (П.17) и (П.22) получаем

$$(П.23) \quad \|G(x_{n+1})\| = 2 \left( \prod_{3 \leq i \leq n+1} |t - x_i| \right) \left( \prod_{3 \leq i < j \leq n+1} |x_i - x_j| \right) \sqrt{1 + t^2 + \dots + t^{2n}}.$$

И на основании (П.12), (П.14) и (П.23) получаем требуемое индукционное выражение

$$(П.24) \quad \begin{aligned} & S(Surf_{n+1}) = \\ & = 2 \int_{\substack{t \in [-1, 1] \\ -1 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq 1}} \cdots \int \sqrt{1 + t^2 + \dots + t^{2n}} \left( \prod_{3 \leq i \leq n+1} |t - x_i| \right) \times \\ & \quad \times \left( \prod_{3 \leq i < j \leq n+1} |x_i - x_j| \right) dt dx_3 \dots dx_n dx_{n+1}. \end{aligned}$$

*Доказательство леммы 1.* Стандартными вычислениями можно проверить, что утверждение леммы выполняется для  $n = 3, 4$ .

$$B_3 \simeq \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2t + 2x_3 & 2t & 2t + x_3 \\ 2tx_3 & t^2 & t^2 + 2tx_3 \end{vmatrix} \simeq 2tx_3(t - x_3),$$

$$\begin{aligned} B_4 \simeq & \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2t + 2(x_3 + x_4) & 2t + x_4 & 2t + x_3 & 2t + x_3 + x_4 \\ 2t(x_3 + x_4) + 2x_3x_4 & t^2 + 2tx_4 & t^2 + 2tx_3 & t^2 + 2t(x_3 + x_4) + x_3x_4 \\ 2tx_3x_4 & t^2x_4 & t^2x_3 & t^2(x_3 + x_4) + 2tx_3x_4 \end{vmatrix} \simeq \\ & \simeq 2tx_3x_4(t - x_3)(t - x_4)(x_3 - x_4). \end{aligned}$$

Докажем утверждение леммы для произвольного  $n$ .

Отдельно можно отметить, что в сжатом виде идея доказательства представлена в «II. Solution by R.J. Walker» [7], где доказывается похожее утверждение.

Первый шаг.

На основании (П.16) делаем тождественные замены в (П.20) в строках  $2, \dots, n$  в столбцах  $2, \dots, n-1$ . Получаем

$$B_n \simeq 2*$$

$$* \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ t + \sigma_1 & 2t + \sigma_1 - x_3 & \dots & 2t + \sigma_1 - x_n & 2t + \sigma_1 \\ t\sigma_1 + \sigma_2 & t^2 + 2t(\sigma_1 - x_3) + \sigma_2 - x_3\sigma_1^{(3)} & \dots & t^2 + 2t(\sigma_1 - x_n) + \sigma_2 - x_n\sigma_1^{(n)} & t^2 + 2t\sigma_1 + \sigma_2 \\ t\sigma_2 + \sigma_3 & t^2(\sigma_1 - x_3) + 2t(\sigma_2 - x_3\sigma_1^{(3)}) + \sigma_3 - x_3\sigma_2^{(3)} & \dots & t^2(\sigma_1 - x_n) + 2t(\sigma_2 - x_n\sigma_1^{(n)}) + \sigma_3 - x_n\sigma_2^{(n)} & t^2\sigma_1 + 2t\sigma_2 + \sigma_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t\sigma_{n-3} + \sigma_{n-2} & t^2(\sigma_{n-4} - x_3\sigma_{n-5}^{(3)}) + 2t(\sigma_{n-3} - x_3\sigma_{n-4}^{(3)}) & \dots & t^2(\sigma_{n-4} - x_n\sigma_{n-5}^{(n)}) + 2t(\sigma_{n-3} - x_n\sigma_{n-4}^{(n)}) & t^2\sigma_{n-4} + 2t\sigma_{n-3} + \sigma_{n-2} \\ t\sigma_{n-2} & t^2(\sigma_{n-3} - x_3\sigma_{n-4}^{(3)}) & \dots & t^2(\sigma_{n-3} - x_n\sigma_{n-4}^{(n)}) & t^2\sigma_{n-3} + 2t\sigma_{n-2} \end{vmatrix}.$$

Из строк  $j = 2, \dots, n-1$  вычитаем первую строку, умноженную на последний элемент  $j$ -й строки  $b_{j,n}$ . Из строки  $n$  вычитаем первую строку, умноженную на  $t^2\sigma_{n-3}$ . Умножаем строки  $j = 2, \dots, n$  на  $-1$ . Получаем

$$B_n \simeq 2*$$

$$* \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ t & x_3 & \dots & x_n & 0 \\ t^2 + t\sigma_1 & 2tx_3 + x_3\sigma_1^{(3)} & \dots & 2tx_n + x_n\sigma_1^{(n)} & 0 \\ t^2\sigma_1 + t\sigma_2 & t^2x_3 + 2tx_3\sigma_1^{(3)} + x_3\sigma_2^{(3)} & \dots & t^2x_n + 2tx_n\sigma_1^{(n)} + x_n\sigma_2^{(n)} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t^2\sigma_{n-5} + t\sigma_{n-4} & t^2x_3\sigma_{n-6}^{(3)} + 2tx_3\sigma_{n-5}^{(3)} + x_3\sigma_{n-4}^{(3)} & \dots & t^2x_n\sigma_{n-6}^{(n)} + 2tx_n\sigma_{n-5}^{(n)} + x_n\sigma_{n-4}^{(n)} & 0 \\ t^2\sigma_{n-4} + t\sigma_{n-3} & t^2x_3\sigma_{n-5}^{(3)} + 2tx_3\sigma_{n-4}^{(3)} + \sigma_{n-2} & \dots & t^2x_n\sigma_{n-5}^{(n)} + 2tx_n\sigma_{n-4}^{(n)} + \sigma_{n-2} & 0 \\ t^2\sigma_{n-3} - t\sigma_{n-2} & t^2x_3\sigma_{n-4}^{(3)} & \dots & t^2x_n\sigma_{n-4}^{(n)} & -2t\sigma_{n-2} \end{vmatrix}.$$

В строке  $n-1$  в столбцах  $j = 2, \dots, n-1$  делаем замену обозначения  $\sigma_{n-2} = x_{j+1}\sigma_{n-3}^{(j+1)}$ . Получаем

$$B_n \simeq 2*$$

$$* \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ t & x_3 & \dots & x_n & 0 \\ t^2 + t\sigma_1 & 2tx_3 + x_3\sigma_1^{(3)} & \dots & 2tx_n + x_n\sigma_1^{(n)} & 0 \\ t^2\sigma_1 + t\sigma_2 & t^2x_3 + 2tx_3\sigma_1^{(3)} + x_3\sigma_2^{(3)} & \dots & t^2x_n + 2tx_n\sigma_1^{(n)} + x_n\sigma_2^{(n)} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t^2\sigma_{n-5} + t\sigma_{n-4} & t^2x_3\sigma_{n-6}^{(3)} + 2tx_3\sigma_{n-5}^{(3)} + x_3\sigma_{n-4}^{(3)} & \dots & t^2x_n\sigma_{n-6}^{(n)} + 2tx_n\sigma_{n-5}^{(n)} + x_n\sigma_{n-4}^{(n)} & 0 \\ t^2\sigma_{n-4} + t\sigma_{n-3} & t^2x_3\sigma_{n-5}^{(3)} + 2tx_3\sigma_{n-4}^{(3)} + x_3\sigma_{n-3}^{(3)} & \dots & t^2x_n\sigma_{n-5}^{(n)} + 2tx_n\sigma_{n-4}^{(n)} + x_n\sigma_{n-3}^{(n)} & 0 \\ t^2\sigma_{n-3} - t\sigma_{n-2} & t^2x_3\sigma_{n-4}^{(3)} & \dots & t^2x_n\sigma_{n-4}^{(n)} & -2t\sigma_{n-2} \end{vmatrix}.$$

Из первого столбца выносим множитель  $t$ , из столбцов  $j = 2, \dots, n - 1$  выносим множители  $x_{j+1}$ . Получаем

$$B_n \simeq 2tx_3 \cdots x_n^*$$

$$* \begin{vmatrix} t^{-1} & x_3^{-1} & \cdots & x_n^{-1} & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ t + \sigma_1 & 2t + \sigma_1^{(3)} & \cdots & 2t + \sigma_1^{(n)} & 0 \\ t\sigma_1 + \sigma_2 & t^2 + 2t\sigma_1^{(3)} + \sigma_2^{(3)} & \cdots & t^2 + 2t\sigma_1^{(n)} + \sigma_2^{(n)} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t\sigma_{n-5} + \sigma_{n-4} & t^2\sigma_{n-6}^{(3)} + 2t\sigma_{n-5}^{(3)} + \sigma_{n-4}^{(3)} & \cdots & t^2\sigma_{n-6}^{(n)} + 2t\sigma_{n-5}^{(n)} + \sigma_{n-4}^{(n)} & 0 \\ t\sigma_{n-4} + \sigma_{n-3} & t^2\sigma_{n-5}^{(3)} + 2t\sigma_{n-4}^{(3)} + \sigma_{n-3}^{(3)} & \cdots & t^2\sigma_{n-5}^{(n)} + 2t\sigma_{n-4}^{(n)} + \sigma_{n-3}^{(n)} & 0 \\ t\sigma_{n-3} - \sigma_{n-2} & t^2\sigma_{n-4}^{(3)} & \cdots & t^2\sigma_{n-4}^{(n)} & (-1)^1 2t\sigma_{n-2} \end{vmatrix}.$$

Второй шаг.

На основании (П.16) делаем тождественные замены в строках  $3, \dots, n$  в столбцах  $2, \dots, n - 1$ . Получаем

$$B_n \simeq 2tx_3 \cdots x_n^*$$

$$* \begin{vmatrix} t^{-1} & x_3^{-1} & \cdots & x_n^{-1} & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ t + \sigma_1 & 2t + \sigma_1 - x_3 & \cdots & 2t + \sigma_1 - x_n & 0 \\ t\sigma_1 + \sigma_2 & t^2 + 2t(\sigma_1 - x_3) + \sigma_2 - x_3\sigma_1^{(3)} & \cdots & t^2 + 2t(\sigma_1 - x_n) + \sigma_2 - x_n\sigma_1^{(n)} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t\sigma_{n-5} + \sigma_{n-4} & t^2(\sigma_{n-6} - x_3\sigma_{n-7}^{(3)}) + \\ & + 2t(\sigma_{n-5} - x_3\sigma_{n-6}^{(3)}) + & \cdots & + 2t(\sigma_{n-5} - x_n\sigma_{n-6}^{(n)}) + & 0 \\ & + \sigma_{n-4} - x_3\sigma_{n-5}^{(3)} & & + \sigma_{n-4} - x_n\sigma_{n-5}^{(n)} & \\ t\sigma_{n-4} + \sigma_{n-3} & t^2(\sigma_{n-5} - x_3\sigma_{n-6}^{(3)}) + \\ & + 2t(\sigma_{n-4} - x_3\sigma_{n-5}^{(3)}) + & \cdots & + 2t(\sigma_{n-4} - x_n\sigma_{n-5}^{(n)}) + & 0 \\ & + \sigma_{n-3} - x_3\sigma_{n-4}^{(3)} & & + \sigma_{n-3} - x_n\sigma_{n-4}^{(n)} & \\ t\sigma_{n-3} - \sigma_{n-2} & t^2(\sigma_{n-4} - x_3\sigma_{n-5}^{(3)}) & \cdots & t^2(\sigma_{n-4} - x_n\sigma_{n-5}^{(n)}) & -2t\sigma_{n-2} \end{vmatrix}.$$

Из строки 3 вычитаем строку 2, умноженную на  $2t + \sigma_1$ . Из строки 4 вычитаем строку 2, умноженную на  $t^2 + 2t\sigma_1 + \sigma_2$ . Из строк  $j = 5, \dots, n - 1$  вычитаем строку 2, умноженную на  $t^2\sigma_{j-4} + 2t\sigma_{j-3} + \sigma_{j-2}$ . Из строки  $n$  вычитаем строку 2, умноженную на  $t^2\sigma_{n-4} - \sigma_{n-2}$ . Умножаем строки  $j = 3, \dots, n$  на  $-1$ .

Получаем

$$B_n \simeq 2tx_3 \cdots x_n^*$$

$$* \left| \begin{array}{cccccc} t^{-1} & x_3^{-1} & \cdots & x_n^{-1} & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ t & x_3 & \cdots & x_n & 0 \\ t^2 + t\sigma_1 & 2tx_3 + x_3\sigma_1^{(3)} & \cdots & 2tx_n + x_n\sigma_1^{(n)} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t^2\sigma_{n-6} + t\sigma_{n-5} & t^2x_3\sigma_{n-7}^{(3)} + 2tx_3\sigma_{n-6}^{(3)} + x_3\sigma_{n-5}^{(3)} & \cdots & t^2x_n\sigma_{n-7}^{(n)} + 2tx_n\sigma_{n-6}^{(n)} + x_n\sigma_{n-5}^{(n)} & 0 \\ t^2\sigma_{n-5} + t\sigma_{n-4} & t^2x_3\sigma_{n-6}^{(3)} + 2tx_3\sigma_{n-5}^{(3)} + x_3\sigma_{n-4}^{(3)} & \cdots & t^2x_n\sigma_{n-6}^{(n)} + 2tx_n\sigma_{n-5}^{(n)} + x_n\sigma_{n-4}^{(n)} & 0 \\ t^2\sigma_{n-4} - t\sigma_{n-3} & t^2x_3\sigma_{n-5}^{(3)} - \sigma_{n-2} & \cdots & t^2x_n\sigma_{n-5}^{(n)} - \sigma_{n-2} & 2t\sigma_{n-2} \end{array} \right|$$

В строке  $n$  в столбцах  $j = 2, \dots, n-1$  делаем замену обозначения  $\sigma_{n-2} = x_{j+1}\sigma_{n-3}^{(j+1)}$ . Получаем

$$B_n \simeq 2tx_3 \cdots x_n^*$$

$$* \left| \begin{array}{cccccc} t^{-1} & x_3^{-1} & \cdots & x_n^{-1} & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ t & x_3 & \cdots & x_n & 0 \\ t^2 + t\sigma_1 & 2tx_3 + x_3\sigma_1^{(3)} & \cdots & 2tx_n + x_n\sigma_1^{(n)} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t^2\sigma_{n-6} + t\sigma_{n-5} & t^2x_3\sigma_{n-7}^{(3)} + 2tx_3\sigma_{n-6}^{(3)} + x_3\sigma_{n-5}^{(3)} & \cdots & t^2x_n\sigma_{n-7}^{(n)} + 2tx_n\sigma_{n-6}^{(n)} + x_n\sigma_{n-5}^{(n)} & 0 \\ t^2\sigma_{n-5} + t\sigma_{n-4} & t^2x_3\sigma_{n-6}^{(3)} + 2tx_3\sigma_{n-5}^{(3)} + x_3\sigma_{n-4}^{(3)} & \cdots & t^2x_n\sigma_{n-6}^{(n)} + 2tx_n\sigma_{n-5}^{(n)} + x_n\sigma_{n-4}^{(n)} & 0 \\ t^2\sigma_{n-4} - t\sigma_{n-3} & t^2x_3\sigma_{n-5}^{(3)} - x_3\sigma_{n-3}^{(3)} & \cdots & t^2x_n\sigma_{n-5}^{(n)} - x_n\sigma_{n-3}^{(n)} & 2t\sigma_{n-2} \end{array} \right|$$

Из первого столбца выносим множитель  $t$ , из столбцов  $j = 2, \dots, n-1$  выносим множители  $x_{j+1}$ . Получаем

$$B_n \simeq 2t^2x_3^2 \cdots x_n^2^*$$

$$* \left| \begin{array}{cccccc} t^{-2} & x_3^{-2} & \cdots & x_n^{-2} & 1 \\ t^{-1} & x_3^{-1} & \cdots & x_n^{-1} & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ t + \sigma_1 & 2t + \sigma_1^{(3)} & \cdots & 2t + \sigma_1^{(n)} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t\sigma_{n-6} + \sigma_{n-5} & t^2\sigma_{n-7}^{(3)} + 2t\sigma_{n-6}^{(3)} + \sigma_{n-5}^{(3)} & \cdots & t^2\sigma_{n-7}^{(n)} + 2t\sigma_{n-6}^{(n)} + \sigma_{n-5}^{(n)} & 0 \\ t\sigma_{n-5} + \sigma_{n-4} & t^2\sigma_{n-6}^{(3)} + 2t\sigma_{n-5}^{(3)} + \sigma_{n-4}^{(3)} & \cdots & t^2\sigma_{n-6}^{(n)} + 2t\sigma_{n-5}^{(n)} + \sigma_{n-4}^{(n)} & 0 \\ t\sigma_{n-4} - \sigma_{n-3} & t^2\sigma_{n-5}^{(3)} - \sigma_{n-3}^{(3)} & \cdots & t^2\sigma_{n-5}^{(n)} - \sigma_{n-3}^{(n)} & (-1)^2 2t\sigma_{n-2} \end{array} \right|$$



Третий шаг.

На основании (П.16) делаем тождественные замены в строках  $4, \dots, n$  в столбцах  $2, \dots, n-1$ . Получаем

$$B_n \simeq 2t^2 x_3^2 \cdots x_n^2 *$$

$$\begin{array}{ccccc|c}
 t^{-2} & x_3^{-2} & \cdots & x_n^{-2} & 1 \\
 t^{-1} & x_3^{-1} & \cdots & x_n^{-1} & 0 \\
 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\
 t + \sigma_1 & 2t + \sigma_1 - x_3 & \cdots & 2t + \sigma_1 - x_n & 0 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 t\sigma_{n-6} + \sigma_{n-5} & t^2(\sigma_{n-7} - x_3\sigma_{n-8}^{(3)}) + \\ & + 2t(\sigma_{n-6} - x_3\sigma_{n-7}^{(3)}) + \\ & + \sigma_{n-5} - x_3\sigma_{n-6}^{(3)} & \cdots & t^2(\sigma_{n-7} - x_n\sigma_{n-8}^{(n)}) + \\ & + 2t(\sigma_{n-6} - x_n\sigma_{n-7}^{(n)}) + \\ & + \sigma_{n-5} - x_n\sigma_{n-6}^{(n)} & & 0 \\
 t\sigma_{n-5} + \sigma_{n-4} & t^2(\sigma_{n-6} - x_3\sigma_{n-7}^{(3)}) + \\ & + 2t(\sigma_{n-5} - x_3\sigma_{n-6}^{(3)}) + \\ & + \sigma_{n-4} - x_3\sigma_{n-5}^{(3)} & \cdots & t^2(\sigma_{n-6} - x_n\sigma_{n-7}^{(n)}) + \\ & + 2t(\sigma_{n-5} - x_n\sigma_{n-6}^{(n)}) + \\ & + \sigma_{n-4} - x_n\sigma_{n-5}^{(n)} & & 0 \\
 t\sigma_{n-4} - \sigma_{n-3} & t^2(\sigma_{n-5} - x_3\sigma_{n-6}^{(3)}) - \\ & - (\sigma_{n-3} - x_3\sigma_{n-4}^{(3)}) & \cdots & t^2(\sigma_{n-5} - x_n\sigma_{n-6}^{(n)}) - \\ & - (\sigma_{n-3} - x_n\sigma_{n-4}^{(n)}) & & 2t\sigma_{n-2}
 \end{array}$$

Из строки 4 вычитаем строку 3, умноженную на  $2t + \sigma_1$ . Из строки 5 вычитаем строку 3, умноженную на  $t^2 + 2t\sigma_1 + \sigma_2$ . Из строк  $j = 6, \dots, n-1$  вычитаем строку 3, умноженную на  $t^2\sigma_{j-5} + 2t\sigma_{j-4} + \sigma_{j-3}$ . Из строки  $n$  вычитаем строку 3, умноженную на  $t^2\sigma_{n-5} - \sigma_{n-3}$ . Умножаем строки  $j = 4, \dots, n$  на  $-1$ . Получаем

$$B_n \simeq 2t^2 x_3^2 \cdots x_n^2 *$$

$$\begin{array}{ccccc|c}
 t^{-2} & x_3^{-2} & \cdots & x_n^{-2} & 1 \\
 t^{-1} & x_3^{-1} & \cdots & x_n^{-1} & 0 \\
 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\
 t & x_3 & \cdots & x_n & 0 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 t^2\sigma_{n-7} + t\sigma_{n-6} & t^2 x_3\sigma_{n-8}^{(3)} + 2tx_3\sigma_{n-7}^{(3)} + x_3\sigma_{n-6}^{(3)} & \cdots & t^2 x_n\sigma_{n-8}^{(n)} + 2tx_n\sigma_{n-7}^{(n)} + x_n\sigma_{n-6}^{(n)} & 0 \\
 t^2\sigma_{n-6} + t\sigma_{n-5} & t^2 x_3\sigma_{n-7}^{(3)} + 2tx_3\sigma_{n-6}^{(3)} + x_3\sigma_{n-5}^{(3)} & \cdots & t^2 x_n\sigma_{n-7}^{(n)} + 2tx_n\sigma_{n-6}^{(n)} + x_n\sigma_{n-5}^{(n)} & 0 \\
 t^2\sigma_{n-5} - t\sigma_{n-4} & t^2 x_3\sigma_{n-6}^{(3)} - x_3\sigma_{n-4}^{(3)} & \cdots & t^2 x_n\sigma_{n-6}^{(n)} - x_n\sigma_{n-4}^{(n)} & -2t\sigma_{n-2}
 \end{array}$$

Из первого столбца выносим множитель  $t$ , из столбцов  $j = 2, \dots, n - 1$  выносим множители  $x_{j+1}$ . Получаем

$$B_n \simeq 2t^3 x_3^3 \cdots x_n^3 *$$

$$* \left( \begin{array}{cccc|c} t^{-3} & x_3^{-3} & \cdots & x_n^{-3} & 1 \\ t^{-2} & x_3^{-2} & \cdots & x_n^{-2} & 0 \\ t^{-1} & x_3^{-1} & \cdots & x_n^{-1} & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t\sigma_{n-7} + \sigma_{n-6} & t^2\sigma_{n-8}^{(3)} + 2t\sigma_{n-7}^{(3)} + \sigma_{n-6}^{(3)} & \cdots & t^2\sigma_{n-8}^{(n)} + 2t\sigma_{n-7}^{(n)} + \sigma_{n-6}^{(n)} & 0 \\ t\sigma_{n-6} + \sigma_{n-5} & t^2\sigma_{n-7}^{(3)} + 2t\sigma_{n-6}^{(3)} + \sigma_{n-5}^{(3)} & \cdots & t^2\sigma_{n-7}^{(n)} + 2t\sigma_{n-6}^{(n)} + \sigma_{n-5}^{(n)} & 0 \\ t\sigma_{n-5} - \sigma_{n-4} & t^2\sigma_{n-6}^{(3)} - \sigma_{n-4}^{(3)} & \cdots & t^2\sigma_{n-6}^{(n)} - \sigma_{n-4}^{(n)} & (-1)^3 2t\sigma_{n-2} \end{array} \right).$$

На этом закончен третий шаг.

Далее по аналогии с шагом 3 выполняем шаги  $4, \dots, n - 5$ .

После шага  $n - 5$

$$B_n \simeq 2t^{n-5} x_3^{n-5} \cdots x_n^{n-5} *$$

$$* \left( \begin{array}{cccc|c} t^{-n+5} & x_3^{-n+5} & \cdots & x_n^{-n+5} & 1 \\ t^{-n+6} & x_3^{-n+6} & \cdots & x_n^{-n+6} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t^{-1} & x_3^{-1} & \cdots & x_n^{-1} & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ t + \sigma_1 & 2t + \sigma_1^{(3)} & \cdots & 2t + \sigma_1^{(n)} & 0 \\ t\sigma_1 + \sigma_2 & t^2 + 2t\sigma_1^{(3)} + \sigma_2^{(3)} & \cdots & t^2 + 2t\sigma_1^{(n)} + \sigma_2^{(n)} & 0 \\ t\sigma_2 + \sigma_3 & t^2\sigma_1^{(3)} + 2t\sigma_2^{(3)} + \sigma_3^{(3)} & \cdots & t^2\sigma_1^{(n)} + 2t\sigma_2^{(n)} + \sigma_3^{(n)} & 0 \\ t\sigma_3 - \sigma_4 & t^2\sigma_2^{(3)} - \sigma_4^{(3)} & \cdots & t^2\sigma_2^{(n)} - \sigma_4^{(n)} & (-1)^{n-5} 2t\sigma_{n-2} \end{array} \right).$$

$(n - 4)$ -й шаг.

На основании (П.16) делаем тождественные замены в строках  $(n - 3), \dots, n$  в столбцах  $2, \dots, n - 1$ . Получаем

$$B_n \simeq 2t^{n-5}x_3^{n-5} \dots x_n^{n-5} *$$

$$\begin{array}{cccccc} \left| \begin{array}{cccccc} t^{-n+5} & x_3^{-n+5} & \dots & x_n^{-n+5} & 1 \\ t^{-n+6} & x_3^{-n+6} & \dots & x_n^{-n+6} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t^{-1} & x_3^{-1} & \dots & x_n^{-1} & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ t + \sigma_1 & 2t + \sigma_1 - x_3 & \dots & 2t + \sigma_1 - x_n & 0 \\ t\sigma_1 + \sigma_2 & t^2 + 2t(\sigma_1 - x_3) + \\ & + \sigma_2 - x_3\sigma_1^{(3)} & \dots & t^2 + 2t(\sigma_1 - x_n) + \sigma_2 - x_n\sigma_1^{(n)} & 0 \\ t\sigma_2 + \sigma_3 & t^2(\sigma_1 - x_3) + \\ & + 2t(\sigma_2 - x_3\sigma_1^{(3)}) + \dots & & t^2(\sigma_1 - x_n) + \\ & + \sigma_3 - x_3\sigma_2^3 & & + 2t(\sigma_2 - x_n\sigma_1^{(n)}) + \\ & & & + \sigma_3 - x_n\sigma_2^{(n)} & 0 \\ t\sigma_3 - \sigma_4 & t^2(\sigma_2 - x_3\sigma_1^{(3)}) - \\ & - (\sigma_4 - x_3\sigma_3^{(3)}) & \dots & t^2(\sigma_2 - x_n\sigma_1^{(n)}) - \\ & & & - (\sigma_4 - x_n\sigma_3^{(n)}) & (-1)^{n-5}2t\sigma_{n-2} \end{array} \right| \end{array} .$$

Из строки  $n - 3$  вычитаем строку  $n - 4$ , умноженную на  $2t + \sigma_1$ . Из строки  $n - 2$  вычитаем строку  $n - 4$ , умноженную на  $t^2 + 2t\sigma_1 + \sigma_2$ . Из строки  $n - 1$  вычитаем строку  $n - 4$ , умноженную на  $t^2\sigma_1 + 2t\sigma_2 + \sigma_3$ . Из строки  $n$  вычитаем строку  $n - 4$ , умноженную на  $t^2\sigma_2 - \sigma_4$ . Умножаем строки  $j = n - 3, \dots, n$  на  $-1$ . Получаем

$$B_n \simeq 2t^{n-5}x_3^{n-5} \dots x_n^{n-5} *$$

$$\begin{array}{cccccc} \left| \begin{array}{cccccc} t^{-n+5} & x_3^{-n+5} & \dots & x_n^{-n+5} & 1 \\ t^{-n+6} & x_3^{-n+6} & \dots & x_n^{-n+6} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t^{-1} & x_3^{-1} & \dots & x_n^{-1} & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ t & x_3 & \dots & x_n & 0 \\ t^2 + t\sigma_1 & 2tx_3 + x_3\sigma_1^{(3)} & \dots & 2tx_n + x_n\sigma_1^{(n)} & 0 \\ t^2\sigma_1 + t\sigma_2 & t^2x_3 + 2tx_3\sigma_1^{(3)} + x_3\sigma_2^3 & \dots & t^2x_n + 2tx_n\sigma_1^{(n)} + x_n\sigma_2^{(n)} & 0 \\ t^2\sigma_2 - t\sigma_3 & t^2x_3\sigma_1^{(3)} - x_3\sigma_3^{(3)} & \dots & t^2x_n\sigma_1^{(n)} - x_n\sigma_3^{(n)} & (-1)^{n-4}2t\sigma_{n-2} \end{array} \right| \end{array} .$$

Из первого столбца выносим множитель  $t$ , из столбцов  $j = 2, \dots, n-1$  выносим множители  $x_{j+1}$ . Получаем

$$B_n \simeq 2t^{n-4}x_3^{n-4} \dots x_n^{n-4} *$$

$$* \left( \begin{array}{cccccc} t^{-n+4} & x_3^{-n+4} & \dots & x_n^{-n+4} & & 1 \\ t^{-n+5} & x_3^{-n+5} & \dots & x_n^{-n+5} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ t^{-2} & x_3^{-2} & \dots & x_n^{-2} & & 0 \\ t^{-1} & x_3^{-1} & \dots & x_n^{-1} & & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & & 0 \\ t + \sigma_1 & 2t + \sigma_1^{(3)} & \dots & 2t + \sigma_1^{(n)} & & 0 \\ t\sigma_1 + \sigma_2 & t^2 + 2t\sigma_1^{(3)} + \sigma_2^{(3)} & \dots & t^2 + 2t\sigma_1^{(n)} + \sigma_2^{(n)} & & 0 \\ t\sigma_2 - \sigma_3 & t^2\sigma_1^{(3)} - \sigma_3^{(3)} & \dots & t^2\sigma_1^{(n)} - \sigma_3^{(n)} & (-1)^{n-4}2t\sigma_{n-2} & \end{array} \right).$$

$(n-3)$ -й шаг.

На основании (П.16) делаем тождественные замены в строках  $(n-2), \dots, n$  в столбцах  $2, \dots, n-1$ . Получаем

$$B_n \simeq 2t^{n-4}x_3^{n-4} \dots x_n^{n-4} *$$

$$* \left( \begin{array}{cccccc} t^{-n+4} & x_3^{-n+4} & \dots & x_n^{-n+4} & & 1 \\ t^{-n+5} & x_3^{-n+5} & \dots & x_n^{-n+5} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ t^{-2} & x_3^{-2} & \dots & x_n^{-2} & & 0 \\ t^{-1} & x_3^{-1} & \dots & x_n^{-1} & & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & & 0 \\ t + \sigma_1 & 2t + \sigma_1 - x_3 & \dots & 2t + \sigma_1 - x_n & & 0 \\ t\sigma_1 + \sigma_2 & t^2 + 2t(\sigma_1 - x_3) + \sigma_2 - x_3\sigma_1^{(3)} & \dots & t^2 + 2t(\sigma_1 - x_n) + \sigma_2 - x_n\sigma_1^{(n)} & & 0 \\ t\sigma_2 - \sigma_3 & t^2(\sigma_1 - x_3) - (\sigma_3 - x_3\sigma_2^{(3)}) & \dots & t^2(\sigma_1 - x_n) - (\sigma_3 - x_n\sigma_2^{(n)}) & (-1)^{n-4}2t\sigma_{n-2} & \end{array} \right).$$

Из строки  $n-2$  вычитаем строку  $n-3$ , умноженную на  $2t + \sigma_1$ . Из строки  $n-1$  вычитаем строку  $n-3$ , умноженную на  $t^2 + 2t\sigma_1 + \sigma_2$ . Из строки  $n$  вычитаем строку  $n-3$ , умноженную на  $t^2\sigma_1 - \sigma_3$ . Умножаем строки  $j =$

$= n - 2, n - 1, n$  на  $-1$ . Получаем

$$B_n \simeq 2t^{n-4}x_3^{n-4} \dots x_n^{n-4} * \begin{vmatrix} t^{-n+4} & x_3^{-n+4} & \dots & x_n^{-n+4} & 1 \\ t^{-n+5} & x_3^{-n+5} & \dots & x_n^{-n+5} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t^{-2} & x_3^{-2} & \dots & x_n^{-2} & 0 \\ t^{-1} & x_3^{-1} & \dots & x_n^{-1} & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ t & x_3 & \dots & x_n & 0 \\ t^2 + t\sigma_1 & 2tx_3 + x_3\sigma_1^{(3)} & \dots & 2tx_n + x_n\sigma_1^{(n)} & 0 \\ t^2\sigma_1 - t\sigma_2 & t^2x_3 - x_3\sigma_2^{(3)} & \dots & t^2x_n - x_n\sigma_2^{(n)} & (-1)^{n-3}2t\sigma_{n-2} \end{vmatrix}.$$

Из первого столбца выносим множитель  $t$ , из столбцов  $j = 2, \dots, n - 1$  выносим множители  $x_{j+1}$ . Получаем

$$B_n \simeq 2t^{n-3}x_3^{n-3} \dots x_n^{n-3} \begin{vmatrix} t^{-n+3} & x_3^{-n+3} & \dots & x_n^{-n+3} & 1 \\ t^{-n+4} & x_3^{-n+4} & \dots & x_n^{-n+4} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t^{-3} & x_3^{-3} & \dots & x_n^{-3} & 0 \\ t^{-2} & x_3^{-2} & \dots & x_n^{-2} & 0 \\ t^{-1} & x_3^{-1} & \dots & x_n^{-1} & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ t + \sigma_1 & 2t + \sigma_1^{(3)} & \dots & 2t + \sigma_1^{(n)} & 0 \\ t\sigma_1 - \sigma_2 & t^2 - \sigma_2^{(3)} & \dots & t^2 - \sigma_2^{(n)} & (-1)^{n-3}2t\sigma_{n-2} \end{vmatrix}.$$

$(n - 2)$ -й шаг.

На основании (П.16) делаем тождественные замены в строках  $n - 1, n$  в столбцах  $2, \dots, n - 1$ . Получаем

$$B_n \simeq 2t^{n-3}x_3^{n-3} \dots x_n^{n-3} * \begin{vmatrix} t^{-n+3} & x_3^{-n+3} & \dots & x_n^{-n+3} & 1 \\ t^{-n+4} & x_3^{-n+4} & \dots & x_n^{-n+4} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t^{-3} & x_3^{-3} & \dots & x_n^{-3} & 0 \\ t^{-2} & x_3^{-2} & \dots & x_n^{-2} & 0 \\ t^{-1} & x_3^{-1} & \dots & x_n^{-1} & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ t + \sigma_1 & 2t + \sigma_1 - x_3 & \dots & 2t + \sigma_1 - x_n & 0 \\ t\sigma_1 - \sigma_2 & t^2 - (\sigma_2 - x_3\sigma_1^{(3)}) & \dots & t^2 - (\sigma_2 - x_n\sigma_1^{(n)}) & (-1)^{n-3}2t\sigma_{n-2} \end{vmatrix}.$$

Из строки  $n-1$  вычитаем строку  $n-2$ , умноженную на  $2t+\sigma_1$ . Из строки  $n$  вычитаем строку  $n-2$ , умноженную на  $t^2-\sigma_2$ . Умножаем строки  $j=n-1, n$  на  $-1$ . Получаем

$$B_n \simeq 2t^{n-3}x_3^{n-3} \dots x_n^{n-3} \begin{vmatrix} t^{-n+3} & x_3^{-n+3} & \dots & x_n^{-n+3} & 1 \\ t^{-n+4} & x_3^{-n+4} & \dots & x_n^{-n+4} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t^{-3} & x_3^{-3} & \dots & x_n^{-3} & 0 \\ t^{-2} & x_3^{-2} & \dots & x_n^{-2} & 0 \\ t^{-1} & x_3^{-1} & \dots & x_n^{-1} & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ t & x_3 & \dots & x_n & 0 \\ t^2 - t\sigma_1 & -x_3\sigma_1^{(3)} & \dots & -x_n\sigma_1^{(n)} & (-1)^{n-2}2t\sigma_{n-2} \end{vmatrix}.$$

Из первого столбца выносим множитель  $t$ , из столбцов  $j=2, \dots, n-1$  выносим множители  $x_{j+1}$ . Получаем

$$B_n \simeq 2t^{n-2}x_3^{n-2} \dots x_n^{n-2} \begin{vmatrix} t^{-n+2} & x_3^{-n+2} & \dots & x_n^{-n+2} & 1 \\ t^{-n+3} & x_3^{-n+3} & \dots & x_n^{-n+3} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t^{-4} & x_3^{-4} & \dots & x_n^{-4} & 0 \\ t^{-3} & x_3^{-3} & \dots & x_n^{-3} & 0 \\ t^{-2} & x_3^{-2} & \dots & x_n^{-2} & 0 \\ t^{-1} & x_3^{-1} & \dots & x_n^{-1} & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ t - \sigma_1 & -\sigma_1^{(3)} & \dots & -\sigma_1^{(n)} & (-1)^{n-2}2t\sigma_{n-2} \end{vmatrix}.$$

$(n-1)$ -й шаг.

На основании (П.16) делаем тождественные замены в последней строке в столбцах  $2, \dots, n-1$ . Получаем

$$B_n \simeq 2t^{n-2}x_3^{n-2} \dots x_n^{n-2} \begin{vmatrix} t^{-n+2} & x_3^{-n+2} & \dots & x_n^{-n+2} & 1 \\ t^{-n+3} & x_3^{-n+3} & \dots & x_n^{-n+3} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t^{-4} & x_3^{-4} & \dots & x_n^{-4} & 0 \\ t^{-3} & x_3^{-3} & \dots & x_n^{-3} & 0 \\ t^{-2} & x_3^{-2} & \dots & x_n^{-2} & 0 \\ t^{-1} & x_3^{-1} & \dots & x_n^{-1} & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ t - \sigma_1 & x_3 - \sigma_1 & \dots & x_n - \sigma_1 & (-1)^{n-2}2t\sigma_{n-2} \end{vmatrix}.$$

Из строки  $n$  вычитаем строку  $n - 1$ , умноженную на  $-\sigma_1$ . Получаем

$$B_n \simeq 2t^{n-2}x_3^{n-2} \cdots x_n^{n-2} \begin{vmatrix} t^{-n+2} & x_3^{-n+2} & \cdots & x_n^{-n+2} & 1 \\ t^{-n+3} & x_3^{-n+3} & \cdots & x_n^{-n+3} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t^{-4} & x_3^{-4} & \cdots & x_n^{-4} & 0 \\ t^{-3} & x_3^{-3} & \cdots & x_n^{-3} & 0 \\ t^{-2} & x_3^{-2} & \cdots & x_n^{-2} & 0 \\ t^{-1} & x_3^{-1} & \cdots & x_n^{-1} & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ t & x_3 & \cdots & x_n & (-1)^{n-2}2t\sigma_{n-2} \end{vmatrix}.$$

Из первого столбца выносим множитель  $t$ , из столбцов  $j = 2, \dots, n - 1$  выносим множители  $x_{j+1}$ . Получаем

$$B_n \simeq 2t^{n-1}x_3^{n-1} \cdots x_n^{n-1} \begin{vmatrix} t^{-n+1} & x_3^{-n+1} & \cdots & x_n^{-n+1} & 1 \\ t^{-n+2} & x_3^{-n+2} & \cdots & x_n^{-n+2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t^{-5} & x_3^{-5} & \cdots & x_n^{-5} & 0 \\ t^{-4} & x_3^{-4} & \cdots & x_n^{-4} & 0 \\ t^{-3} & x_3^{-3} & \cdots & x_n^{-3} & 0 \\ t^{-2} & x_3^{-2} & \cdots & x_n^{-2} & 0 \\ t^{-1} & x_3^{-1} & \cdots & x_n^{-1} & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & (-1)^{n-2}2t\sigma_{n-2} \end{vmatrix}.$$

На этом закончен шаг  $(n - 1)$ , после которого возвращаем вынесенные множители в соответствующие столбцы определителя и получаем

$$(П.25) \quad B_n \simeq 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ t & x_3 & \cdots & x_n & 0 \\ t^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} & 0 \\ t^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & (-1)^{n-2}2t\sigma_{n-2} \end{vmatrix}.$$

После разложения определителя (П.25) по последнему столбцу, получаем

$$(П.26) \quad B_n \simeq 2 \left( (-1)^{n+1}tx_3 \cdots x_n V(t, x_3, \dots, x_n) + (-1)^{2n}(-1)^{n-2}2tx_3 \cdots x_n V(t, x_3, \dots, x_n) \right),$$

где  $V(t, x_3, \dots, x_n)$  – определитель Вандермонда от переменных  $t, x_3, \dots, x_n$ .

Учитывая разную четность степеней  $-1$  в (П.26), получаем

$$B_n \simeq 2tx_3 \cdots x_n V(t, x_3, \dots, x_n).$$

Лемма 1 и теорема 2 доказаны.

*Доказательство теоремы 3.* В [2] показано, что

$$\log_2 V(D_n) = -\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{4}\right) \log_2 n + O(n).$$

Следовательно,

$$\ln V(D_n) = -\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{4}\right) \ln n + O(n).$$

В [3] показано, что

$$\ln \left( \frac{V(\mathcal{E}_n)}{V(D_n)} \right) = -\frac{\ln 2}{2} n^2 + \frac{1}{8} \ln n + O(1)$$

и

$$\begin{aligned} (II.27) \quad V(\mathcal{E}_n) &= \int_{-1 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq 1} \dots \int \left( \prod_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j| \right) dx_1 \dots dx_n = \\ &= 2^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{k=1}^n \frac{\{(k-1)!\}^2}{(2k-1)!}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$(II.28) \quad \ln V(\mathcal{E}_n) = -\frac{\ln 2}{2} n^2 - \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{8}\right) \ln n + O(n).$$

На основании (II.5) из доказательства теоремы 1 имеем

$$S(Pl_n^{(1)}) = S(Pl_n^{(-1)}) = \sqrt{n} V(\mathcal{E}_{n-1}).$$

На основании (7) в теореме 2 и (II.27) можно увидеть, что

$$\begin{aligned} &S(Surf_n) = \\ &= 2 \int_{\substack{x_1 \in [-1,1] \\ -1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq 1}} \dots \int \sqrt{1 + x_1^2 + \dots + x_1^{2(n-1)}} \left( \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} |x_i - x_j| \right) dx_1 \dots dx_{n-1} \leq \\ &\leq 2\sqrt{n} \int_{\substack{x_1 \in [-1,1] \\ -1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq 1}} \dots \int \left( \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} |x_i - x_j| \right) dx_1 \dots dx_{n-1} = 2\sqrt{n}(n-1)V(\mathcal{E}_{n-1}). \end{aligned}$$

Таким образом, на основании (8) получаем

$$(II.29) \quad S(\partial \mathcal{E}_n) \leq 2\sqrt{n} n V(\mathcal{E}_{n-1}).$$



На основании (П.28) и (П.29) получаем

$$\ln S(\partial\mathcal{E}_n) \leq -\frac{\ln 2}{2}n^2 - \frac{n}{2}\ln n + O(n).$$

Так как при значительно больших значениях  $n$  величина  $(-\frac{\ln 2}{2}n^2 - \frac{n}{2}\ln n)$  доминирует над значением  $O(n)$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln S(\partial\mathcal{E}_n) = -\infty$ , откуда следует, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} S(\partial\mathcal{E}_n) = 0$ .

На этом закончено доказательство первой части теоремы 3.

Теперь докажем вторую часть теоремы 3 о том, что максимальное значение  $S(\partial\mathcal{E}_n)$  достигается при  $n = 3$ .

Из (П.27) следует, что

$$V(\mathcal{E}_n) = V(\mathcal{E}_{n-1}) 2^n \frac{\{(n-1)!\}^2}{(2n-1)!}, \quad n \geq 2,$$

$$V(\mathcal{E}_1) = 2.$$

Тогда, с учетом (П.29), получаем, что

$$(П.30) \quad S(\partial\mathcal{E}_n) \leq F(n), \quad n \geq 2,$$

где

$$F(1) = 2,$$

$$F(n) = F(n-1) \times k(n), \quad n \geq 2,$$

$$k(n) = 2^{n-1} \frac{n\sqrt{n}}{(n-1)\sqrt{n-1}} \frac{\{(n-2)!\}^2}{(2n-3)!}.$$

Покажем, что  $k(n) < 1$  при  $n \geq 4$ .

$$(П.31) \quad k(n) = 2^{n-1} \frac{n\sqrt{n}}{(n-1)\sqrt{n-1}} \frac{1 \times 2 \cdots (n-2)}{(n-1) \times n \cdots (2n-3)} =$$

$$= \frac{2\sqrt{n}}{(n-1)\sqrt{n-1}} \times \frac{2 \times 1}{n-1} \times \frac{2 \times 2}{n+1} \times \frac{2 \times 3}{n+2} \cdots \frac{2 \times (n-2)}{2n-3}.$$

В (П.31) всего  $(n-1)$  сомножителей, и все из них меньше 1 при  $n \geq n_0 = 4$ .

Это означает, что  $k(n) < 1$  и  $F(n)$  в (П.30) является убывающей функцией при  $n \geq 4$ . Следовательно, при  $n \geq 4$

$$S(\partial\mathcal{E}_n) \leq F(n) \leq F(4) = 2\sqrt{4} \times 4 \times V(\mathcal{E}_3) \approx 5,689.$$

С учетом (5) вторая часть теоремы 3 доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dzhafarov V., Büyükköroğlu T., Akyar H.* Stability Region for Discrete Time Systems and Its Boundary // Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN. 2021. V. 27. No. 3. P. 246–255.
2. *Fam A.T.* The volume of the coefficient space stability domain of monic polynomials // IEEE International Symposium on Circuits and Systems. 1989. P. 1780–1783.
3. *Akiyama S., Pethő A.* On the distribution of polynomials with bounded roots, I. Polynomials with real coefficients // J. Math. Soc. Japan. 2014. V. 66. No. 3. P. 927–949.
4. *Fam A.T., Meditch J.S.* A canonical parameter space for linear systems design // IEEE Transact. Autom. Control. 1978. V. 23. No. 3. P. 454–458.
5. *Zellner A.* An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics. N.Y.: John Wiley & Sons, 1996.
6. *Farebrother R.W.* Simplified Samuelson Conditions for Cubic and Quartic Equations // Manchester School Econom. Soc. Studies. 1973. V. 41. No. 4. P. 396–406.
7. *Wedderburn J.H.M., Smiley M.F., Walker R.J.* Jacobian, Alternant // Amer. Math. Monthly. 1942. V. 49. No. 10. P. 694–696. <https://www.jstor.org/stable/2302597>

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Маликовым.*

Поступила в редакцию 07.02.2024

После доработки 11.11.2024

Принята к публикации 25.11.2024